מרתון - תורת המספרים

פונקציית אוילר

לדוגמא: .

תכונות:

1. כאשר ראשוני.
2. כאשר ראשוני.
3. כאשר .

מכאן יש דרך לחשב עבור כל מספר :

1. מפרקים את לראשוניים: .
2. .

לדוגמא: .

נוסחת אוילר: אם אז: .  
(אם במקום n תציבו p ראשוני תקבלו את פרמה)  
כל מספר בחזקת פונקציית אוילר של המודולו שקול ל 1 באותו מודולו בתנאי שהמספר והמודולו זרים.

ניתן למצוא הופכי של במודולו : כי נסמן: .  
לדוגמא: אם . מצאו את ההופכי של :

תשובה: .

תרגיל: מצאו את 2 הספרות האחרונות של המספר .  
פתרון: מחפשים: .  
.  
נשתמש בנוסחת אוילר: .  
מכאן: . מכאן:

נותר לחשב .  
תשובה סופית: 21.

תרגיל: מצאו את 2 הספרות האחרונות של המספר .  
פתרון: מחפשים:   
מכאן: . ומכאן: נחשב: מכאן:   
ומכאן: נחשב:   
.  
נשתמש בנוסחת אוילר: . לכן: .  
.

כעת, לפי משפט השאריות הסיני: , .  
.

תורת החבורות

חבורה: מבנה המקיים: (\* פעולה דו מקומית)

0. המבנה סגור לפעולה.  
דוגמא לתקין: . כי מכפלת 2 רציונאליים שווה למספר רציונאלי.  
דוגמא ללא תקין: . כי ייתכן והמכפלה תצא יותר מ 2.  
1. הפעולה אסוציאטיבית כלומר: .  
דוגמא לתקין: . כי .  
דוגמא ללא תקין: כי: לא בהכרח. כי .  
2. קיים איבר יחידה: . (איבר נטראלי)  
בחיבור - 0. בכפל - 1.  
3. לכל איבר ב יש הופכי: . כך ש: .  
בחיבור: לכל x ההופכי הוא כי .  
בכפל: לכל ההופכי הוא: כי: .

תת חבורה: מקיימת את כל התנאים של חבורה ומוכלת בחבורה הגדולה.

תרגיל: האם המבנים הבאים הם חבורות:

א. - לא, כי ל 0 אין הופכי.

ב. - חבורה.

0. סגירות: יהיו . צ"ל: .  
מהשייכות ל G נובע שקיימים כך ש: .  
כעת: . נסמן: ולכן: .

1. + היא פעולה אסוציאטיבית בין מספרים.
2. יחידה: 0. . (נטראלי לחיבור)
3. הופכי: יהא . צ"ל: קיים: כך ש: .  
   מהשייכות ל G נובע שקיימים כך ש: . נבחר: ואכן: כי יש גם מינוסים ב Q. ובנוסף מתקיים: .

לכן היא חבורה.

ג. - חבורה.

0. סגירות: יהיו . אז: כי הרכבת פונקציות חח"ע היא חח"ע.  
כי: .

1. הרכבת פונקציות היא אסוציאטיבית: .
2. איבר יחידה: פונקציית הזהות: . כי .
3. הופכי: הפונקציה ההופכית: .  
   פונקציה בין 2 קבוצות באותו גודל (סופי) , אם היא חח"ע אז היא על.